Teselados del plano: aperiodicidad, indecidibilidad, y un teorema de Rice

Nicanor Carrasco-Vargas

Estudiante de doctorado UC, Chile
Supervisión: Cristóbal Rojas y Sebastián Barbieri
njcarrasco@uc.cl
Beamer en nicanorcarrascovargas.github.io

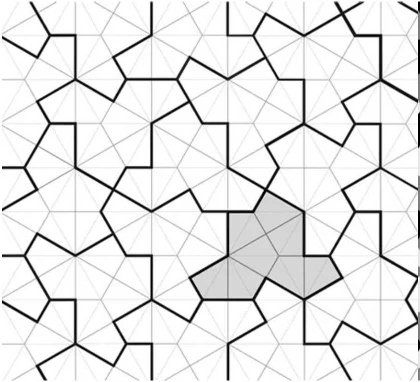
Seminario CENIA IA 2024

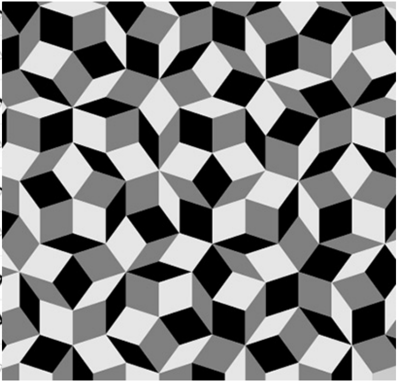
Contenidos

Teselados

Teselados

Teselados aperiodicos





Izquerda: Teselado aperiódico de 1 forma, descubierto por Smith, Myers, Kaplan, and Goodman-Strauss.
Derecha: Teselado aperiódico de 2 formas, descubierto por Penrose.

Cuasi cristales

MAY 10, 2023 Editors' notes

Researchers discover liquid quasicrystal with dodecagonal tiling pattern

by Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

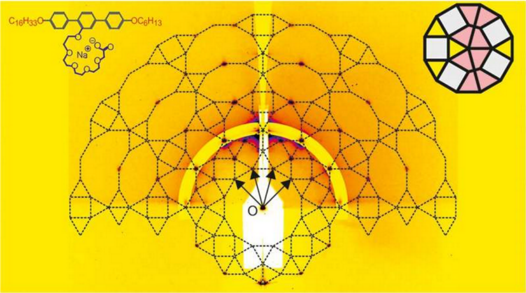
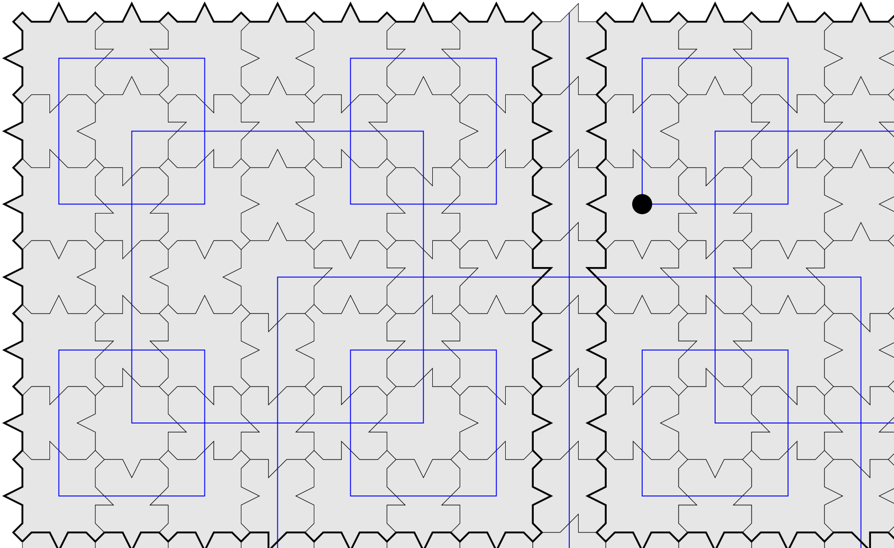


Illustration of liquid quasicrystals consisting of dodecagons Credit: Zeng et al / *Nature Chemistry*

El primer teselado aperiodico

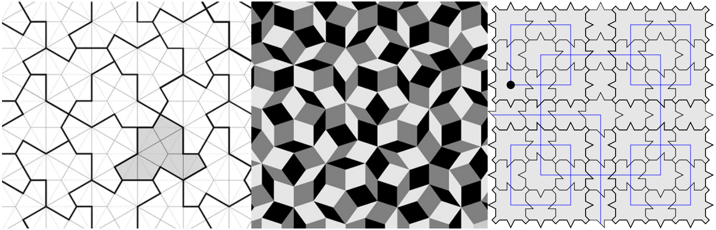
El primer teselado aperiódico fue exhibido por Berger en 1966, con mas de 20.000 piezas. En 1971, Robinson lo simplificó a uno de 6 piezas (32 contando rotaciones y reflexiones).

El teselado de Robinson



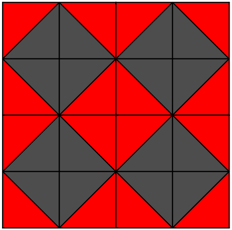
Como definir un teselado?

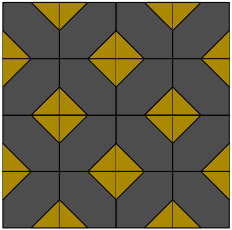
Conjunto finito de formas



Como definir un teselado?

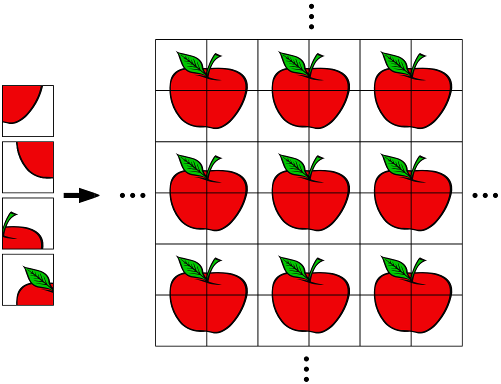
Conjunto finito de formas + reglas para pegar





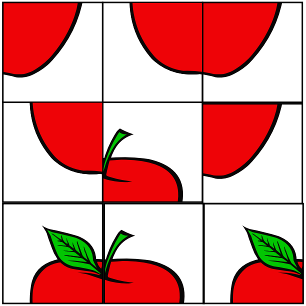
Como definir un teselado?

Conjunto finito de formas + reglas para pegar



Indecidibilidad y aperiodicidad

Indecidibilidad y aperiodicidad



Teselados e indecidibilidad

Observación

Dado un conjunto de baldosas cuadradas con dibujos, es posible que no admitan ningún teselado infinito.

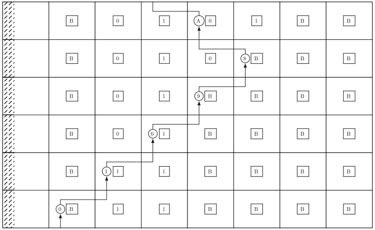
Teselados e indecidibilidad

Observación

Dado un conjunto de baldosas cuadradas con dibujos, es posible que no admitan ningún teselado infinito.

Teorema (Berger 1966)

No existe algoritmo que, dado un conjunto de baldosas cuadradas con dibujos, decida si pueden formar un teselado de $\mathbb{Z}^2$.



Teselados e indecidibilidad

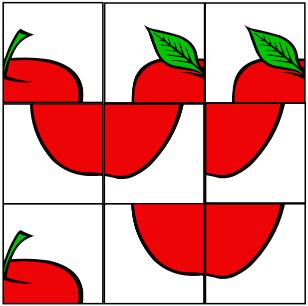
Teorema (Berger 1966)

No existe algoritmo que, dado un conjunto de baldosas cuadradas con dibujos, decida si pueden formar un teselado de $\mathbb{Z}^2$.

Teselados e indecidibilidad

Teorema (Berger 1966)

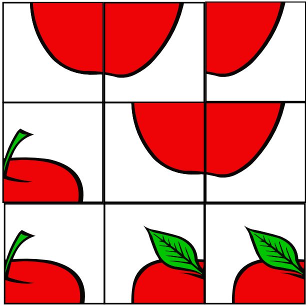
No existe algoritmo que, dado un conjunto de baldosas cuadradas con dibujos, decida si pueden formar un teselado de $\mathbb{Z}^2$.



Teselados e indecidibilidad

Teorema (Berger 1966)

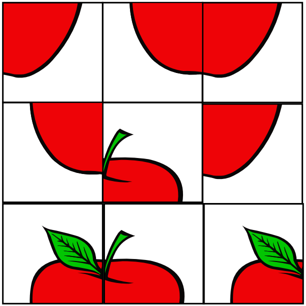
No existe algoritmo que, dado un conjunto de baldosas cuadradas con dibujos, decida si pueden formar un teselado de $\mathbb{Z}^2$.



Teselados e indecidibilidad

Teorema (Berger 1966)

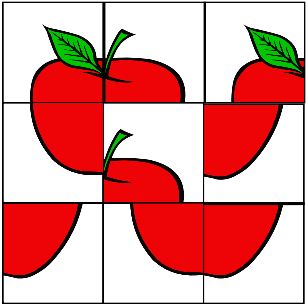
No existe algoritmo que, dado un conjunto de baldosas cuadradas con dibujos, decida si pueden formar un teselado de $\mathbb{Z}^2$.



Teselados e indecidibilidad

Teorema (Berger 1966)

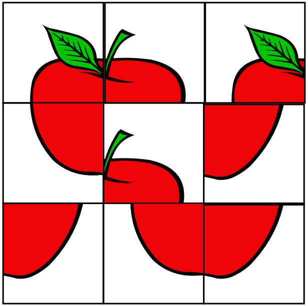
No existe algoritmo que, dado un conjunto de baldosas cuadradas con dibujos, decida si pueden formar un teselado de $\mathbb{Z}^2$.



Teselados e indecidibilidad

Teorema (Berger 1966)

No existe algoritmo que, dado un conjunto de baldosas cuadradas con dibujos, decida si pueden formar un teselado de $\mathbb{Z}^2$.



Corolario

Existen teselados aperiodicos.

Sistemas dinámicos topológicos

Sistemas dinámicos topológicos

Sistemas dinámicos topológicos

Observación

Baldosas cuadradas con dibujos $\rightarrow$ Espacio de teselados de $\mathbb{Z}^2$ $\rightarrow$ Sistemas dinámico.

Sistemas dinámicos topológicos

Observación

Baldosas cuadradas con dibujos $\rightarrow$ Espacio de teselados de $\mathbb{Z}^2$ $\rightarrow$ Sistemas dinámico.

Definición

Un sistema dinámico topológico es una acción continua de un grupo G en un espacio métrico compacto.

Teselados, subshifts, y SFTs

Definición

Dado un conjunto finito A, consideramos el espacio A^G con la topologia pro-discreta, y la acción $G \curvearrowright A^G$, $g \cdot x(h) = x(g^{-1}h)$.

Definición

Un **subshift** es un subsistema de $G \curvearrowright A^G$: un subconjunto topologicamente cerrado e invariante por traslaciones.

SFTs y teselados

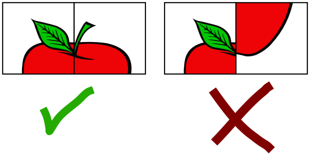
Definición

Un subshift es de **tipo finito (SFT)** si está determinado por un conjunto finito de reglas locales. Formalmente, una regla es un patrón prohibido. Un **patrón** es una funcion $p\colon F \to A$, con $F \subset G$ finito.

SFTs y teselados

Definición

Un subshift es de **tipo finito** (**SFT**) si está determinado por un conjunto finito de reglas locales. Formalmente, una regla es un patrón prohibido. Un **patrón** es una funcion $p\colon F \to A$, con $F \subset G$ finito.



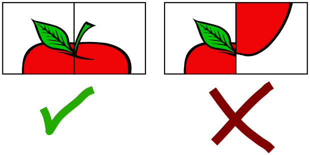
SFTs y teselados

Observación

Espacio de teselados $\rightarrow$ SFT en $\mathbb{Z}^2$.

A = conjunto finito de baldosas con dibujos.

$\mathcal{F}$ = Baldosas adjacentes mal puestas.



Observación

Un SFT en $\mathbb{Z}^2$ siempre es isomorfo a un espacio de teselados.

Propiedades dinámicas

Definición

Dos sistemas $G \curvearrowright X$, $G \curvearrowright Y$ son **isomorfos** si hay un homeomorfismo $X \to Y$ que conmuta con las acciones.

Propiedades dinámicas

Definición

Dos sistemas $G \curvearrowright X$, $G \curvearrowright Y$ son **isomorfos** si hay un homeomorfismo $X \to Y$ que conmuta con las acciones.

Definición

Una propiedad de SFTs (o de un espacio de teselados) se llama dinámica cuando se preserva por isomorfismo.

Propiedades dinámicas

Definición

Dos sistemas $G \curvearrowright X$, $G \curvearrowright Y$ son **isomorfos** si hay un homeomorfismo $X \to Y$ que conmuta con las acciones.

Definición

Una propiedad de SFTs (o de un espacio de teselados) se llama dinámica cuando se preserva por isomorfismo.

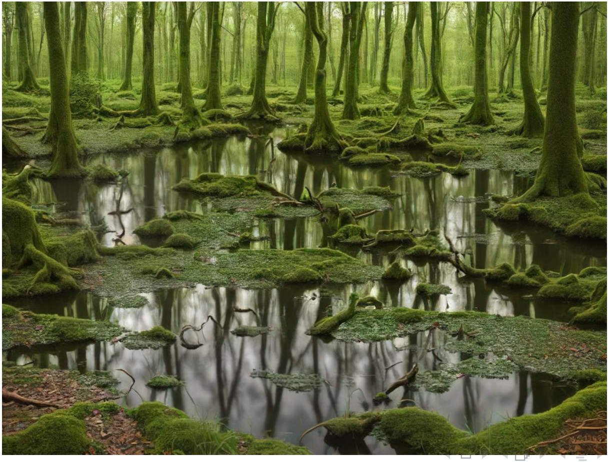
1. Tener configuraciones periódicas.
2. Tener infinitas configuraciones.
3. Ser minimal (no hay subsistemas propios).
4. Ser transitivo (existe una orbita densa).
5. Tener una única medida ergódica.

El pantano de la indecidibilidad

El pantano de la indecidibilidad

El pantano de la indecidibilidad

La mayoría parte de las propiedades dinámicas que le interesan a la gente, son indecidibles para SFTs en $\mathbb{Z}^2$. Lind acuñó el termino «pantano de indecidibilidad» para expresar esto.



El teorema de Rice

Teorema (Rice)

Toda propiedad semántica y no trivial sobre algoritmos es indecidible.

El teorema de Rice

Teorema (Rice)

Toda propiedad semántica y no trivial sobre algoritmos es indecidible.

No trivial = existe un algoritmo que la cumple y otro que no.
Semántica = depende del comportamiento del algorítmo (input $\rightarrow$ output).

El teorema de Rice

Teorema (Rice)

Toda propiedad semántica y no trivial sobre algoritmos es indecidible.

No trivial = existe un algoritmo que la cumple y otro que no.
Semántica = depende del comportamiento del algorítmo (input $\rightarrow$ output).
Hay resultados parecidos para propiedades de grupos finitamente presentados, y también conjuntos límites de autómatas celulares.

El teorema de Rice

Teorema (Rice)

Toda propiedad semántica y no trivial sobre algoritmos es indecidible.

No trivial = existe un algoritmo que la cumple y otro que no.
Semántica = depende del comportamiento del algorítmo (input $\to$ output).
Hay resultados parecidos para propiedades de grupos finitamente presentados, y también conjuntos límites de autómatas celulares.

Pregunta

Existe un resultado similar para propiedades dinámicas de SFTs (o teselados?).

No hay teorema de Rice para SFTs

Observación

La propiedad «Tener un punto fijo» es dinámica, no trivial, y decidible para SFTs en $\mathbb{Z}^2$.

No hay teorema de Rice para SFTs

Observación

La propiedad «Tener un punto fijo» es dinámica, no trivial, y decidible para SFTs en $\mathbb{Z}^2$.

Luego, no se puede probar un teorema de Rice para propiedades dinámicas de SFTs.

Un casi teorema de Rice para SFTs

Teorema (C, arXiv:2401.10347)

Sea P una propiedad de SFTs en $\mathbb{Z}^2$. Supongamos que existen SFTs X_- y X_+ que cumplen lo siguiente:

1. *X_- no satisface P, ni cualquier SFT X que admite un morfismo sobreyectivo $X \to X_-$.*
2. *X_+ cumple P.*
3. *X_+ admite un morfismo hacia X_-.*

Entonces P es indecidible.

Un casi teorema de Rice para SFTs

Teorema (C, arXiv:2401.10347)

Sea P una propiedad de SFTs en $\mathbb{Z}^2$. Supongamos que existen SFTs X_- y X_+ que cumplen lo siguiente:

1. *X_- no satisface P, ni cualquier SFT X que admite un morfismo sobreyectivo $X \to X_-$.*
2. *X_+ cumple P.*
3. *X_+ admite un morfismo hacia X_-.*

Entonces P es indecidible.

Corolario

Cualquier propiedad notrivial, preservada por morfismos sobreyectivos, y verificada por el sistema vacío, es indecidible.

Un casi teorema de Rice para SFTs

Examples

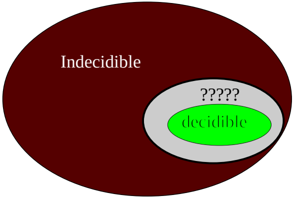
El resultado aplica a muchas propiedades: minimalidad, transitividad, ser únicamente ergódico, periodicidad, aperiodicidad, entropía topológica positiva, entropía topológica completamente positiva, etc.

Un casi teorema de Rice para SFTs

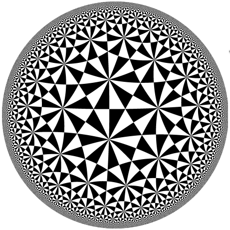
Examples

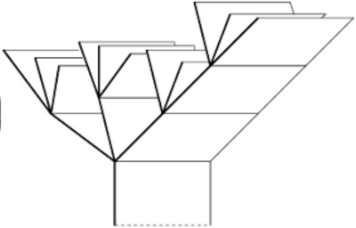
El resultado aplica a muchas propiedades: minimalidad, transitividad, ser únicamente ergódico, periodicidad, aperiodicidad, entropía topológica positiva, entropía topológica completamente positiva, etc.

Pantano de la indecidibilidad

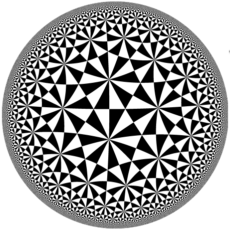


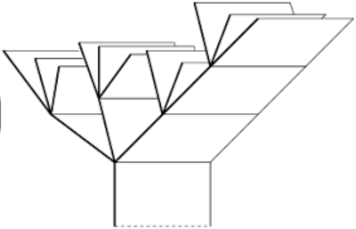
Otros mundos





Otros mundos





Observación

Estos resultados valen reemplazando $\mathbb{Z}^2$ por otros espacios. Por ejemplo, teselados hiperbolicos, o de grupos de Baumslag-Solitar, grupos asociados a teselados hiperbolicos. La única propiedad necesaria es que el problema de decidir si un SFT/teselado es vacío, sea indecidible.

Pregunta

Pregunta

El teorema de Rice, y sus variantes, nos hablan de limites absolutos del cómputo. Qué ocurre con el aprendizaje?

Agradecimientos

Las imagenes de baldosas con dibujos son mias, el resto fueron tomadas de internet, y el crédito es a los respectivos autores. Las imagenes del teselado de Robinson fueron tomadas de «arXiv:1711.03401». La imagen del pantano fue creada por DeepAI image generator.