Un invariante para subshifts de naturaleza recursiva

Nicanor Carrasco-Vargas

UC
njcarrasco@mat.uc.cl
Beamer en nicanorcarrascovargas.github.io

SOMACHI 2023

Esta charla contiene avances de mi tesis de doctorado en desarrollo bajo la dirección de Cristóbal Rojas (UC) y Sebastián Barbieri (USACH), junto a algunos resultados en colaboración con Alonso H. Núñez (IMT) y Mathieu Sablik (IMT).

Tabla de contenidos

Tema de la charla: un invariante dinámico para subshifts, m.

Espacios simbólicos

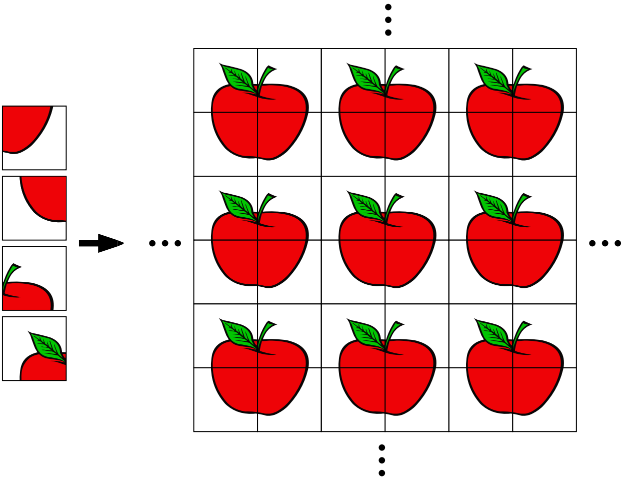


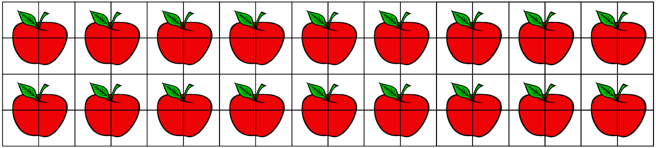
Figure: Cuatro baldosas dibujadas que producen embaldosados de $\mathbb{Z}^2$.

Espacios simbólicos

1. Alfabeto A = conjunto finito
2. Configuracion = $x : \boldsymbol{Z}^d \to A$, escribimos $(x_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^d}$
3. Subshift en $\boldsymbol{Z}^d$ en alfabeto A = conjunto de configuraciones topologicamente cerrado en $A^{\boldsymbol{Z}^d}$ e invariante por traslaciones de $\sigma^{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^d$.
$$x \mapsto \sigma^{\boldsymbol{n}} x$$
$$(\sigma^{\boldsymbol{n}} x)_{\boldsymbol{m}} = x_{\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}}.$$
4. Estas definiciones se extiende facilmente reemplazando $\boldsymbol{Z}^d$ por un grupo contable.

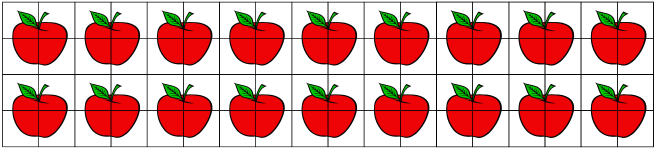
SFT = subshift de tipo finito

1. Definición informal: "definido por finitas reglas locales"
2. Definición formal: se obtiene prohibiendo finitos coloreos de un trozo finito ($p : \{0, \ldots, n\}^d \to A$)
3. Modulo conjugación topológica, es un espacio de embaldosados con baldosas con dibujitos



Periodicidad y calculabiliad

Motivación I: Periodicidad y calculabilidad



Calculabilidad y periodicidad en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}^2$

Notar

Los SFT que uno suele ver en el piso son periodicos, es decir, siempre vienen de configuraciones con orbitas finitas.

Calculabilidad y periodicidad en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}^2$

Notar

Los SFT que uno suele ver en el piso son periodicos, es decir, siempre vienen de configuraciones con orbitas finitas.

Theorem (Folklore)

En $\mathbb{Z}$ todo SFT tiene un punto periodico.

Calculabilidad y periodicidad en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}^2$

Notar

Los SFT que uno suele ver en el piso son periodicos, es decir, siempre vienen de configuraciones con orbitas finitas.

Theorem (Folklore)

En $\mathbb{Z}$ todo SFT tiene un punto periodico.

Theorem (Berger 1966)

En $\mathbb{Z}^2$ existe un SFT aperiódico (sin orbitas finitas).

Calculabilidad y periodicidad en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}^2$

Notar

Los SFT que uno suele ver en el piso son periodicos, es decir, siempre vienen de configuraciones con orbitas finitas.

Theorem (Folklore)

En $\mathbb{Z}$ todo SFT tiene un punto periodico.

Theorem (Berger 1966)

En $\mathbb{Z}^2$ existe un SFT aperiódico (sin orbitas finitas).

Theorem (Myers 1974; Hanf 1974)

Existe un SFT incalculable, es decir, todas las configuraciones son incalculables.

Calculabilidad

Definition

Una configuracion $x : \boldsymbol{Z}^d \to A$ es calculable si existe un programa de computador que en entrada $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^d$ entrega el valor $x(\boldsymbol{n})$.

Example

Una configuracion periodica $(a_1 \dots a_n)^\infty$ en $\boldsymbol{Z}$ es calculable.

Calculabilidad

Definition

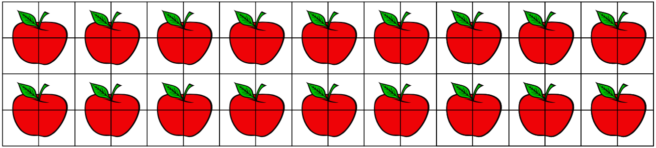
Una configuracion $x : \boldsymbol{Z}^d \to A$ es calculable si existe un programa de computador que en entrada $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^d$ entrega el valor $x(\boldsymbol{n})$.

Example

Una configuracion periodica $(a_1 \dots a_n)^\infty$ en $\boldsymbol{Z}$ es calculable.

Example

Una configuracion periodica (una repetición de un coloreo de $n \times m$) en $\boldsymbol{Z}^2$ tambien.



Calculabilidad y aperiodicidad

Definition

Un subshift es incalculable si todos sus configuraciones son incalculables.

Calculabilidad y aperiodicidad

Definition

Un subshift es incalculable si todos sus configuraciones son incalculables.

Theorem

Ser incalculable es una propiedad dinamica para subshifts, es decir se preserva por conjugación topologica.

Calculabilidad y aperiodicidad

Definition

Un subshift es incalculable si todos sus configuraciones son incalculables.

Theorem

Ser incalculable es una propiedad dinamica para subshifts, es decir se preserva por conjugación topologica.

Theorem

Incalculable $\Rightarrow$ *aperiodico (sin orbitas finitas)*

Calculabilidad y aperiodicidad

Definition

Un subshift es incalculable si todos sus configuraciones son incalculables.

Theorem

Ser incalculable es una propiedad dinamica para subshifts, es decir se preserva por conjugación topologica.

Theorem

Incalculable $\Rightarrow$ *aperiodico (sin orbitas finitas)*
Esto vale para subshifts en cualquier grupo f.g.

Calculabilidad y aperiodicidad

Las siguientes preguntas estan abiertas para muchos grupos

Existe un SFT aperiodico?

Existe un SFT incalculable?

Calculabilidad y aperiodicidad

Las siguientes preguntas estan abiertas para muchos grupos

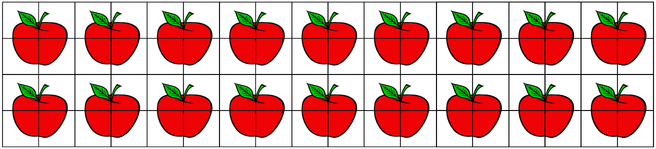
Existe un SFT aperiodico?

Existe un SFT incalculable?

En los grupos donde han sido resueltas, como $\boldsymbol{Z}^d$, las tecnicas de demostracion han sido bien similares.

Periodicidad y calculabiliad

Motivación II: El espacio de subshifts y sus puntos aislados



El espacio de todos los subshifts

Consideramos el espacio metrico (S^d, d) de todos los subshifts

$$S^d = \{X \subset A^{\mathbf{Z}^d} \mid A \subset \mathbf{N} \text{ finito y } X \text{ es subshift}\}$$

$$d(X, Y) = 2^{-n}, \quad n = \max\{k \mid L_k X = L_k Y\}$$

El espacio S^1

Theorem (Pavlov and Schmieding 2022)

El conjunto de puntos aislados de S^1 es denso en S^1.

Este resultado muestra que basta estudiar los puntos aislados del espacio S^1 para conocer propiedades genericas.

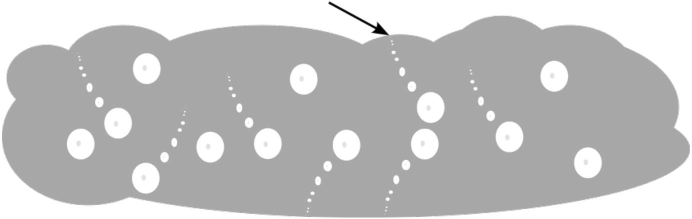


Figure: espacio S^1

El espacio S^2

Theorem (C, Núñez, y Sablik)

Para $d \geq 2$, el conjunto de puntos aislados en S^d no es denso.

Este resultado muestra que no basta estudiar los puntos aislados del espacio S^2 para conocer propiedades genericas.

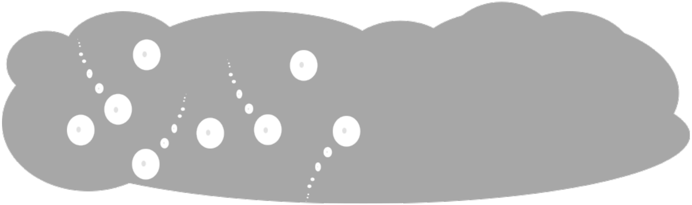


Figure: Espacio S^2

El espacio S^2

Theorem (C, Núñez, y Sablik)

Si X es un SFT incalculable, entonces tiene una vecindad sin puntos aislados.

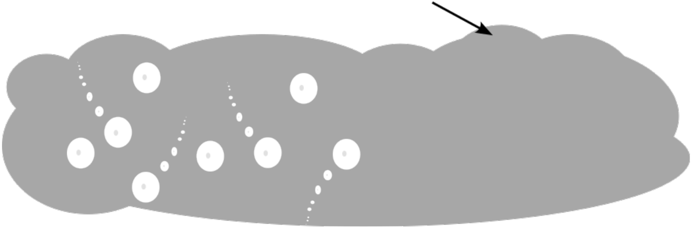
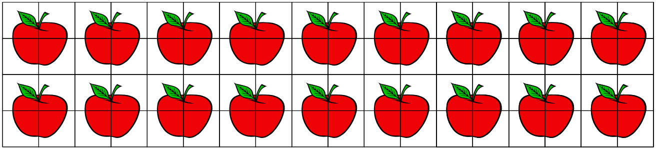


Figure: *Espacio S^2*

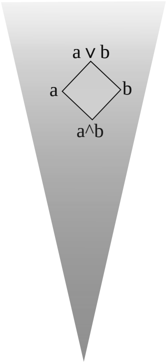
El invariante m

El invariante m



El invariante m

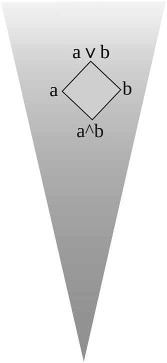
El invariante m mide qué tan incalculable es un subshift. Toma valores en un conjunto parcialmente ordenado $(M, \leq_M)$ que es un lattice y tiene un mínimo.



$(M, \leq_M)$

El invariante m

El invariante m mide qué tan incalculable es un subshift. Toma valores en un conjunto parcialmente ordenado $(M, \leq_M)$ que es un lattice y tiene un mínimo.

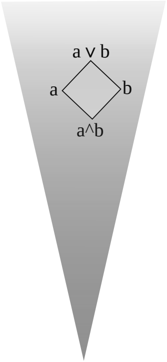


$(M, \leq_M)$

- $m(X) = 0_M \iff X$ tiene puntos calculables

El invariante m

El invariante m mide qué tan incalculable es un subshift. Toma valores en un conjunto parcialmente ordenado $(M, \leq_M)$ que es un lattice y tiene un mínimo.

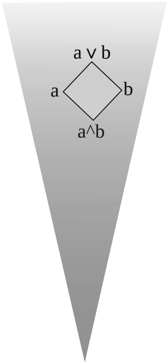


$(M, \leq_M)$

- $m(X) = 0_M \iff X$ tiene puntos calculables
- $X \twoheadrightarrow Y \Rightarrow m(X) \geq m(Y)$

El invariante m

El invariante m mide qué tan incalculable es un subshift. Toma valores en un conjunto parcialmente ordenado $(M, \leq_M)$ que es un lattice y tiene un mínimo.

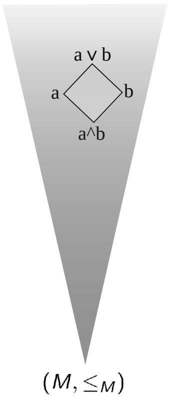


$(M, \leq_M)$

- $m(X) = 0_M \iff X$ tiene puntos calculables
- $X \twoheadrightarrow Y \Rightarrow m(X) \geq m(Y)$
- m es propiedad dinámica

El invariante m

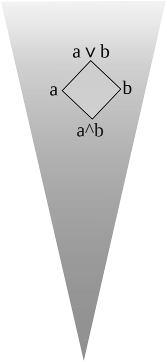
El invariante m mide qué tan incalculable es un subshift. Toma valores en un conjunto parcialmente ordenado $(M, \leq_M)$ que es un lattice y tiene un mínimo.



- $m(X) = 0_M \iff X$ tiene puntos calculables
- $X \twoheadrightarrow Y \Rightarrow m(X) \geq m(Y)$
- m es propiedad dinámica
- $m(X \sqcup Y) = m(X) \wedge_M m(Y)$, $m(X \times Y) = m(X) \vee_M m(Y)$.

El invariante m

El invariante m mide qué tan incalculable es un subshift. Toma valores en un conjunto parcialmente ordenado $(M, \leq_M)$ que es un lattice y tiene un mínimo.

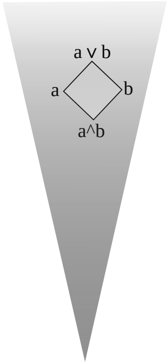


$(M, \leq_M)$

- $m(X) = 0_M \iff X$ tiene puntos calculables
- $X \twoheadrightarrow Y \Rightarrow m(X) \geq m(Y)$
- m es propiedad dinámica
- $m(X \sqcup Y) = m(X) \wedge_M m(Y)$, $m(X \times Y) = m(X) \vee_M m(Y)$.
- Esto vale para G grupo finitamente generado!

El invariante m

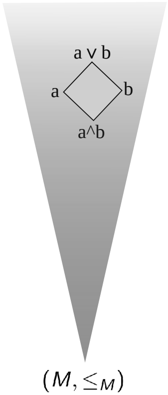
El invariante m mide qué tan incalculable es un subshift. Toma valores en un conjunto parcialmente ordenado $(M, \leq_M)$ que es un lattice y tiene un mínimo.



$(M, \leq_M)$

- $m(X) = 0_M \iff X$ tiene puntos calculables
- $X \twoheadrightarrow Y \Rightarrow m(X) \geq m(Y)$
- m es propiedad dinámica
- $m(X \sqcup Y) = m(X) \wedge_M m(Y)$, $m(X \times Y) = m(X) \vee_M m(Y)$.
- Esto vale para G grupo finitamente generado!
- Comparar con la entropia topológica (para G promediable)

Definición formal



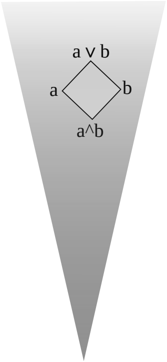
Definition (Medvedev 1955)

Sean $P, Q \subset \{0,1\}^{\mathbf{N}}$. Escribimos

$$P \leq_M Q$$

cuando existe una funcion calculable $Q \to P$.

Definición formal



$(M, \leq_M)$

Definition (Medvedev 1955)

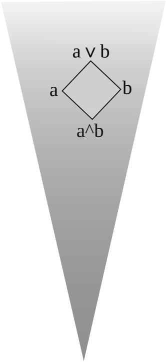
Sean $P, Q \subset \{0,1\}^{\mathbf{N}}$. Escribimos

$$P \leq_M Q$$

cuando existe una funcion calculable $Q \to P$.

- De $\leq_M$ sale una relación de equivalencia $\equiv_M$

Definición formal



$(M, \leq_M)$

Definition (Medvedev 1955)

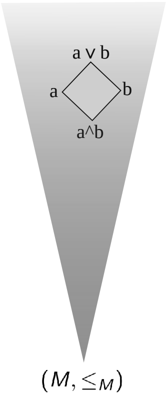
Sean $P, Q \subset \{0,1\}^{\mathbf{N}}$. Escribimos

$$P \leq_M Q$$

cuando existe una funcion calculable $Q \to P$.

- De $\leq_M$ sale una relación de equivalencia $\equiv_M$
- $(M, \leq_M)$ son las clases de equivalencia de $\equiv_M$

Definición formal



Definition (Medvedev 1955)

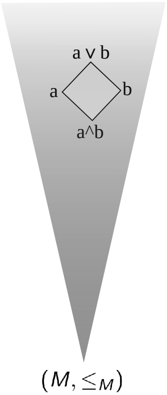
Sean $P, Q \subset \{0,1\}^{\mathbf{N}}$. Escribimos

$$P \leq_M Q$$

cuando existe una funcion calculable $Q \to P$.

- De $\leq_M$ sale una relación de equivalencia $\equiv_M$
- $(M, \leq_M)$ son las clases de equivalencia de $\equiv_M$
- Los elementos en $(M, \leq_M)$ se llaman grados de Medvedev.

Definición formal



Definition (Medvedev 1955)

Sean $P, Q \subset \{0,1\}^{\mathbf{N}}$. Escribimos

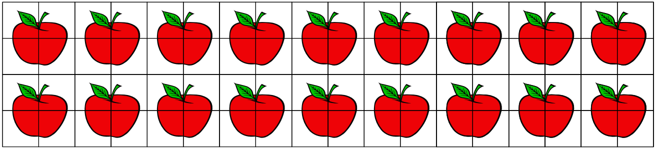
$$P \leq_M Q$$

cuando existe una funcion calculable $Q \to P$.

- De $\leq_M$ sale una relación de equivalencia $\equiv_M$
- $(M, \leq_M)$ son las clases de equivalencia de $\equiv_M$
- Los elementos en $(M, \leq_M)$ se llaman grados de Medvedev.
- Se extiende a subconjuntos de A^G.

Qué se sabe?

Qué se sabe de m en cuanto invariante para subshifts?



Preguntas

Pregunta clasica:

$$\{h(X) \mid X \text{ en cierta clase}\}?$$

Preguntas

Pregunta clasica:

$$\{h(X) \mid X \text{ en cierta clase}\}?$$

Pregunta reciente:

$$\{m(X) \mid X \text{ en cierta clase}\}?$$

Preguntas

Pregunta clasica:

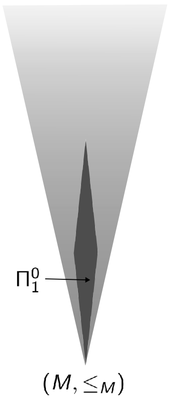
$$\{h(X) \mid X \text{ en cierta clase}\}?$$

Pregunta reciente:

$$\{m(X) \mid X \text{ en cierta clase}\}?$$

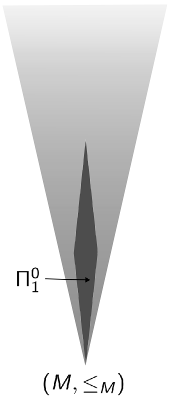
Esta pregunta ha estado implícita en la literatura. Mi tesis es sobre esta pregunta.

Lo que se sabe sobre SFT



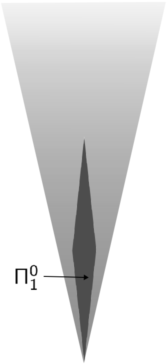
- En $\boldsymbol{Z}$, $m(X) = 0_M$ para cualquier SFT (folklore, puntos periodicos)

Lo que se sabe sobre SFT



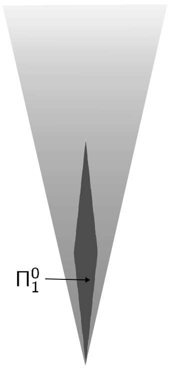
- En $\mathbb{Z}$, $m(X) = 0_M$ para cualquier SFT (folklore, puntos periodicos)
- En $\mathbb{Z}^d, d \geq 2$, los SFT alcanzan todos los elementos Π^0_1 de la lattice M. (Simpson 2014)

Lo que se sabe sobre SFT



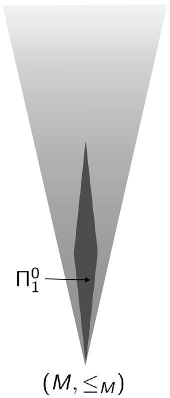
- En $\mathbb{Z}$, $m(X) = 0_M$ para cualquier SFT (folklore, puntos periodicos)
- En $\mathbb{Z}^d, d \geq 2$, los SFT alcanzan todos los elementos Π_1^0 de la lattice M. (Simpson 2014)
- La pregunta está abierta para muchos grupos. En los casos conocidos se ve una dicotomia
    - Los SFT alcanzan solo el grado trivial, o
    - Los SFT alcanzan todos los grados posibles.

SFT → Subshift efectivos



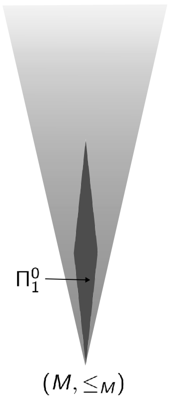
- Subshift efectivos = una clase de subshift que contiene los SFT y sóficos

SFT $\rightarrow$ Subshift efectivos



- Subshift efectivos = una clase de subshift que contiene los SFT y sóficos
- En $\mathbb{Z}$ los subshift efectivos alcanzan todos los elementos Π_1^0 de la lattice M (Miller 2012).

SFT $\rightarrow$ Subshift efectivos



- Subshift efectivos = una clase de subshift que contiene los SFT y sóficos
- En $\mathbb{Z}$ los subshift efectivos alcanzan todos los elementos Π^0_1 de la lattice M (Miller 2012).
- Esta clasificación se extiende a G f.g., infinito, y con problema de palabra decidible (Carrasco-Vargas 2023).

Trabajo futuro

Subshifts efectivos $\rightarrow$ *SFT en grupos distintos de* $\boldsymbol{Z}^d$.

Gracias

Muchas gracias

Bibliografia

Carrasco-Vargas, Nicanor (Mar. 2023). *The Geometric Subgroup Membership Problem*. DOI: 10.48550/arXiv.2303.14820. arXiv: 2303.14820 [math]. (Visited on 04/12/2023).

Miller, Joseph S. (2012). "Two Notes on Subshifts". In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 140.5, pp. 1617–1622. ISSN: 0002-9939. DOI: 10.1090/S0002-9939-2011-11000-1.

Simpson, Stephen G. (2014). "Medvedev Degrees of Two-Dimensional Subshifts of Finite Type". In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 34.2, pp. 679–688. ISSN: 0143-3857. DOI: 10.1017/etds.2012.152.

Berger, Robert (1966). *The Undecidability of the Domino Problem*. Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society. ISBN: 978-0-8218-1266-2 978-1-4704-0013-2. (Visited on 09/04/2021).